# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ
# ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

## Διδακτικές Σημειώσεις

Μανόλης Βάβαλης

Art. No xxxxx
ISBN xxx--xx--xxxx--xx--x
Edition 0.0

# Περιεχόμενα

# 1. Προθέρμανση



Η Αλίκη έσκυψε κάτω από το φράχτη και χώθηκε στην τρύπα, δίχως να σκεφτεί με ποιον τρόπο θα έβγαινε από κει μέσα.

*Η Αλίκη στην Χώρα των Θαυμάτων, Λούις Κάρολ*

*Στο πρώτο αυτό κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να αποκτήσουμε μια αρχική ιδέα αναφορικά με το γενικότερο αντικείμενο της Γραμμικής Άλγεβρας, τις βασικές έννοιες και τα γενικά χαρακτηριστικά της. Η ανάπτυξη του Κεφαλαίου αυτού είναι σχετικά ασαφής. Η ελπίδα είναι να διαμορφώσουμε μια εννοιλογική βαση πάνω στην οποία θα εργαστούμε στα επόμενα κεφάλαια. Με την διαμόρφωση της εν λόγω βάσης θα συγκεκριμενοποιήσουμε τις αναφερόμενες έννοιες και θα κατανοήσουμε το γενικότερο πλαίσιο της Γραμμικής Άλγεβρας. Επιπρόσθετα θα προσπαθήσουμε να πάρουμε μια πρώτη εικόνα τόσο της χρησιμότητας όσο και της σπουδαιότητας της Γραμμικής Άλγεβρας.*

## 1.1 Προθέρμανση

> Η γραμμική άλγεβρα είναι τομέας των μαθηματικών και της άλγεβρας ο οποίος ασχολείται με τη μελέτη διανυσμάτων, διανυσματικών χώρων, γραμμικών απεικονίσεων και συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Η αναλυτική γεωμετρία αποτελεί έκφρασή της και η ίδια αποτελεί κεντρικό συνδετικό ιστό των σύγχρονων μαθηματικών, ιδιαιτέρως μέσω της αφηρημένης έννοιας του διανυσματικού χώρου η οποία μπορεί να μοντελοποιήσει πολλά διαφορετικά προβλήματα που συναντώνται στην πράξη. Συνηθισμένη πρακτική είναι η προσέγγιση μη γραμμικών φαινομένων με γραμμικά μοντέλα (γραμμικοποίηση), προκειμένου να μπορούν να εφαρμοστούν οι μεθοδολογίες της γραμμικής άλγεβρας. Η εν λόγω «γραμμικότητα» αφορά το γεγονός ότι οι μεθοδολογίες αυτές εφαρμόζονται σε σύνολα συναρτήσεων οι οποίες στον τύπο τους περιέχουν μόνο πολυώνυμα πρώτου ή μηδενικού βαθμού και περιγράφουν σχέσεις μεταξύ ν-διάστατων διανυσμάτων. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται και γραμμικές επειδή, στην αναλυτική γεωμετρία, απεικονίζονται οπτικά με ευθείες γραμμές.
>
> *Βικιπαίδεια, 2017*

Ο παραπάνω ορισμός της Γραμμικής Άλγεβρας που θα βρούμε στην κατα γενική ομολογία έγκυρη Βικιπαίδαια, δεν βοηθά όσο θα έπρεπε. Αναφέρει βεβαίως κάποια απο τα χαρακτηριστικά της Γραμμικής Άλγβερας, δεν μας βοηθά όμως να ξεδιαλύνουμε το τί στην ουσία είναι, ούτε να δικαιολογήσουμε το όνομα της. Δεν θα συναντήσουμε πολλές γραμμές ούτε θα εστιάσουμε τόσο πολύ στις αλγεβρικές πράξεις όσο στην γνωστή Άλγβερα.

Με βάση την εμπειρία της έως τώρα εκπαίδευσής μας "Άλγεβρα" χοντρικά σημαίνει "συσχετίσεις" μεταξύ γνωστών ή/και αγνώστων αριθμών. Για παράδειγμα, παρόλο που δεν γνωρίζουμε τους $x$ και $y$, μπορούμε με ευκολία να κατανοήσουμε και να χρησιμοποιησουμε εκφράσεις της μορφής $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$. Κάτι παρόμοιο θα κάνουμε και στην Γραμμική Άλγεβρα μόνον οι γνωστοί και οι άγνωστοι δεν θα είναι απλά αριθμοί μόνον, αλλά κάτι λίγο ποιο περίπλοκο. Αναμενόμενο είναι και οι συσχετίσεις τους να μην είναι τόσο απλές, μια και θα αφορούν πράξεις μεταξύ πιο σύνθετων στοιχείων, όπως διανύσματα και πίνακες, τα οποία θα συναντήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

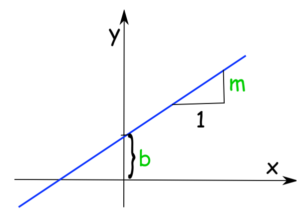
Είναι αναμενόμενο να ισχυρισθούμε ότι το επίθετο "Γραμμική" προέρχεται από την Γεωμετρία και συγκεκριμένα απο την έννοια της γραμμής. Της ευθείας γραμμής συγκεκριμένα. Είναι δηλαδή άλγεβρα των γραμμών. Ορίστε λοιπόν δύο γραμμές

$$\begin{aligned} y &= 2x+1 \\ y &= -3x+7 \end{aligned}$$

Μπορούμε να προσθέσουμε/αφαιρέσουμε (κατά μέλη) τις δύο αυτές γραμμές και έτσι να προκύψει μια άλλη γραμμή, να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη όποιας γραμμής επιθυμούμε με έναν πραγματικό αριθμό, να κάνουμε γενικά διάφορες αλγεβρικές πράξεις.

Ας παραμείνουμε για λίγο στην Γεωμετρία και ας δούμε αρχικά σε τι είδους γραμμών αναφέρεται η Γραμμική Άλγεβρα. Στο σχήμα 1.1 παραθέτουμε την γραφική παράσταση της ευθείας στο επίπεδο

$$y(x) = mx + b \tag{1.1}$$




Σχήμα 1.1: Γραφική παράσταση της ευθείας $y = mx + b$.

όπου $m$ είναι η κλίση της ευθείας και όπου $b$ το σημείο στο οποίο τέμνει η ευθεία τον άξονα του $y$.

Η παραπάνω μαθηματική έκφραση της ευθείας γραμμής βασίζεται στις αποκλειστικά γεωμετρικής φύσης παραμέτρους $m$ και $b$ οι οποίες όμως πολύ λίγα προσφέρουν στην αλγεβρική της έκφανση. Προφανώς μπορούμε να επεξεργαστούμε αλγεβρικά την εξίσωση αυτή με τις παρακάτω απλές, και βαρετές, πράξεις

$$y = mx + b \Longleftrightarrow y - mx = b \Longleftrightarrow -mx + y = b \Longleftrightarrow -mx_1 + x_2 = b$$

όπου στο τελευταίο βήμα έχουμε αλλάξει την ονομασία των μεταβλητών. Μπορούμε τώρα να ισχυρισθούμε ότι η γενική γεωμετική μορφή της ευθείας που δώσαμε στην 1.1 είναι απολύτως ισοδύναμη (για $a_2 \neq 0$) με την παρακάτω γενική αλγεβρική της μορφή

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b'. \tag{1.2}$$

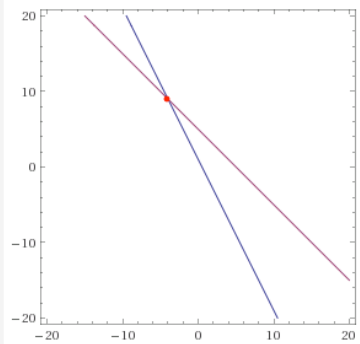
Η χρησιμότητα της διατύπωσης της ευθείας στην παραπάνω μορφή θα φανεί σε λίγο. Προς το παρόν σημειώστε ότι $m = a_1/a_2, \forall a_2 \neq 0$και $b' = b/a_2$ και ότι η γραφική παράσταση της 1.2 είναι η ίδια με αυτήν της 1.1 και το μόνο που αλλάζει στο σχήμα 1.1 είναι τα ονόματα των αξόνων που τώρα γίνονται $x_1$ και $x_2$.

Μπορούμε να επεξεργαστούμε με ευκολία ευθείες μέσω αλγεβρικών εκφράσεων της μορφής 1.2 και γνωστών αλγεβρικών πράξεων.

**Παράδειγμα 1.1 (Σημείο τομής δύο ευθειών)** Θεωρήστε τις παρκάτω δύο ευθείες

$$2x + y = 1$$
$$x + y = 5$$

και υπολογίστε το σημείο που αυτές τέμνονται. Αφαιρούμε την δεύτερη εξίσωση απο την πρώτη για να πάρουμε $x = -4$ και αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του $x$ σε μια απο τις εξισώσεις 1.2 για να πάρουμε $y = 9$, συνεπώς οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο $(-4, )$. Μπορούμε να διατυπώσουμε το παραπάνω συμπερασμά μας με τον εξής τρόπο: το σημείο $(-4, 9)$ ανήκει και στις δύο ευθείες και μάλιστα είναι το μοναδικό σημείο του επιπέδου με την ιδιότητα αυτή.
Προφανώς το σημείο αυτό μπορεί να υπολογισθεί και γεωμετρικά ώς εξής,




```
ContourPlot[{2x+y==1, x+y==5},
    {x,-20,20},{y,-20,20}]
```

Όπως θα δούμε όμως παρακάτω αυτό ελάχιστα θα μας βοηθήσει στην ανάπτυξη του θέματός μας.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να επεκτείνουμε τα παραπάνω για να διατυπώσουμε την εξίσωση μιας ευθείας γραμμής στις τρεις διαστάσεις. Η απλή λογική μας προτρέπει να εξετάσουμε την εξής επέκταση της εξίσωσης 1.2:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \tag{1.3}$$

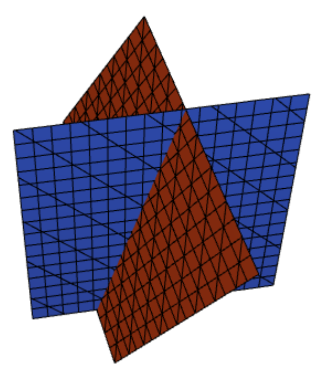
όπου $x_3$ είναι η νέα (τρίτη) μεταβλητή και $a_3 \in$ ο ανάλογος συντελεστής και όπου για την ευκολία μας ξεφορτωθήκαμε τον τόνο απο το $b$.

Δυστυχώς, όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε, η 1.3 είναι εξίσωση επιπέδου και όχι ευθείας. Είναι όμως ιδιαίτερα χρήσιμη μια και μπορούμε να ορίσουμε κάθε ευθεία σαν τομή δύο επιπέδων. Πρέπει λοιπόν να συμπληρώσουμε την 1.3 με μια παρόμοια εξίσωση η οποία θα καθορίζει το άλλο επίπεδο που χρειαζόμαστε για τον ορισμό της ευθείας.

**Παράδειγμα 1.2 (Σημείο τομής δύο επιπέδων)** Θεωρήστε τα παρακάτω δύο επίπεδα

$$2x + y + z = 5 \tag{1.4}$$
$$-2x + 7y + 2z = 9 \tag{1.5}$$

και υπολογίστε την ευθεία που αυτά τέμνονται.
Θα μάθουμε παρακάτω πως μπορούμε να βρούμε όλα τα σημεία που ανήκουν και στα δύο επίπεδα με αλγεβρικό τρόπο. Προς το παρόν ας αρκεστούμε στην γραφική παράσταση των δύο επιπέδων, καθώς και της τομή τους όπως αυτά δίνονται στο παράπλευρο σχήμα το οποίο μπορούμε να αναπαράξουμε με τον εξής κώδικα



```
ContourPlot3D[{2x+y+z == 5, -2x+7y+2z == 9},
     {x,-10,10}, {y,-10,10},{z,-10,10}]
```

Για να επεκτείνουμε τον γενικό συμβολισμό που εισαγάγαμε με την εξίσωση 1.3 για περισσότερες απο μια εξισώσεις εισαγάγουμε έναν ακόμα δείκτη στους συντελεστές των αγνώστων ως εξής

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1 \tag{1.6}$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2. \tag{1.7}$$

Έτσι λοιπόν συμβολίζουμε με $x_j$, $j = 1, 2, 3$ τους τρείς αγνώστους του συστήματος και με $a_{i,j}, i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ τον συντελεστή του $j$ αγνώστου στην $i$ εξίσωση. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι στο Παράδειγμα 1.2 έχουμε ότι $a_{2,3} = 2$.

Στην προσπάθειά μας να γενικεύσουμε περαιτέρω το πρόβλημά μας, ας προσθέσουμε μια ακόμα εξίσωση στις 1.6 ως εξής

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1 \tag{1.8}$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2 \tag{1.9}$$
$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3 \tag{1.10}$$

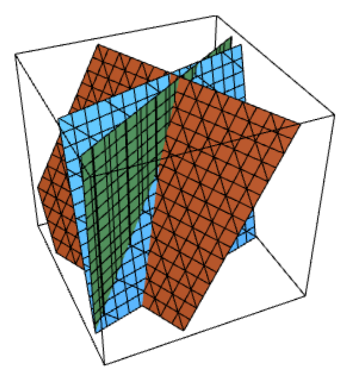
και ας αναρωτηθούμε πόσα και ποιά σημεία του τρισδιάστατου χώρου ανήκουν και στα τρία επίπεδα που ορίζουν οι παραπάνω τρεις εξισώσεις γενικής μορφής. Πριν προσπαθήσουμε να απαντήσουμε το ερώτημα αυτό αλγεβρικά ας προσθέσουμε μια συγκεκριμένη εξίσωση στο Παράδειγμα 1.2 και ας δουλέψουμε γεωμετρικά ως εξής

**Παράδειγμα 1.3 (Σημείο τομής τριών επιπέδων)** Θεωρήστε τα παρακάτω τρία επίπεδα

$$2x + y + z = 5 \tag{1.11}$$
$$-2x + 7y + 2z = 9 \tag{1.12}$$
$$4x - 6y = -2 \tag{1.13}$$

και υπολογίστε το σημείο που αυτά τέμνονται.
Ας κάνουμε την γραφική παράσταση των τριών επιπέδων, καθώς και της τομή τους όπως αυτά δίνονται στο παράπλευρο σχήμα το οποίο μπορούμε να αναπαράξουμε με τον εξής κώδικα

```
ContourPlot3D[{2x+y+z == ´5 −2x+7y+2z == 9;
    4−x6y == −2},
    {x,−10,10}, {y,−10,10},{z,−10,10}]
```



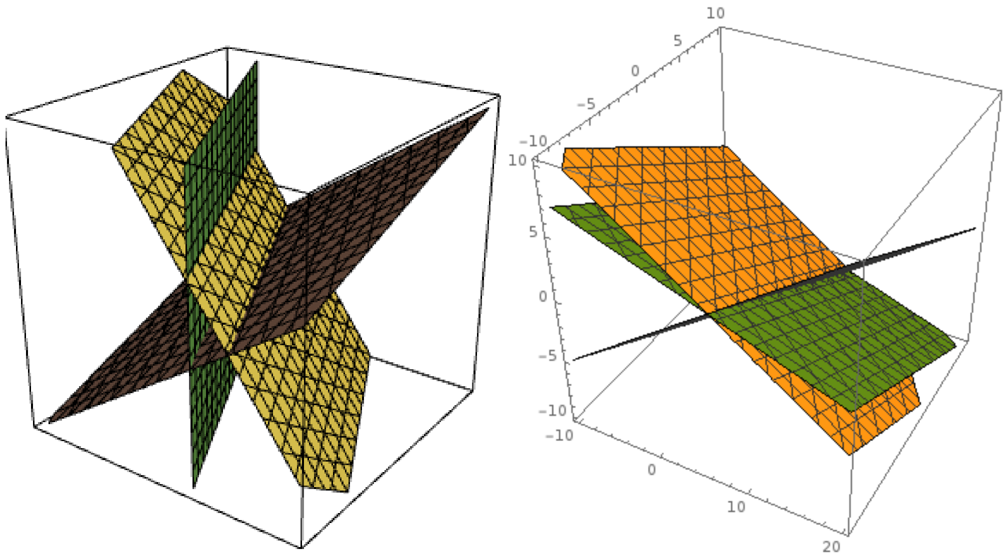
Παρατηρούμε ότι το σημείο τομής τους φαίνεται να είναι μοναδικό. Αν προσπαθήσουμε λίγο περισσότερο με τα γραφικά θα διαπιστώσουμε ότι το σημείο αυτό είναι "περίπου" το $(1, 1, 2)$.

Δεν είναι δύσκολο να μαντέψουμε ότι υπάρχουν εν γένει και άλλα ενδεχόμενα ως προς το που τέμνονται τρία επίπεδα στον χώρο. Δύο απο αυτά δίνονται στις γραφικές παραστάσεις του σχήματος.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τρία επίπεδα μπορεί να μην τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο και αυτό μπορεί να συμβεί με διάφορους τρόπους:

- Τα τρία επίπεδα να είναι παράλληλα.
- Τα δύο επίπεδα να είναι παράλληλα και το τρίτο να τα τέμνει σε δύο παράλληλες ευθείες.

r




Σχήμα 1.2: Γραφική παράσταση περιπτώσεων όπου τρία επίπεδο τέμνονται σε μια ευθεία ή δεν τέμνοται πουθενά.

- Τα δύο επίπεδα να τέμνονται ανά δύο σε τρεις παράλληλες ευθείες.
- Τα τρία επίπεδα να σε μια κοινή ευθεία,
- Δύο απο τα επίπεδα να συμπίπτουν, και το τρίτο να τα τέμνει σε μια ευθεία.
- Και τα τρία επίπεδα να συμπίπτουν.

Εύκολα μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής συμπέρασμα.

*Στις τρείς πρώτες περιπτώσεις τα τρία επίπεδα δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, στις τρείς τελευταίες έχουν άπειρα κοινά σημεία ενώ την περίπτωση του Παραδείγματος 1.3 έχουν ένα και μοναδικό κοινό σημείο.*

Όπως θα δούμε είναι σημαντικό να διατυπώσουμε την παραπάνω πρόταση με τους εξής δύο ισοδύναμους εναλλακτικούς τρόπους.

*Στις τρείς πρώτες περιπτώσεις δεν υπάρχει κανένα κανένα σημείο του επιπέδου που να ανήκει στα εν λόγω τρία επίπεδα, στις τρείς τελευταίες υπάχρουν άπειρα τέτοια σημεία ενώ την περίπτωση του Παραδείγματος 1.3 υπάρχει ένα και μοναδικό τέτοιο σημείο.*

*Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις δεν υπάρχει καμία τριάδα τιμών των αγνώστων $x, y, z$ που να ικανοποιεί καί τις τρείς εξισώσεις 1.11, στις τρείς τελευταίες υπάρχουν άπειρες τέτοιες τριάδες ενώ την περίπτωση του Παραδείγματος 1.3 υπάρχει μια και μοναδική τέτοια τριάδα.*

Κάθε προσπάθεια να υπολογίσουμε την τομή των τριών επιπέδων με γεωμετρικό τρόπο φαίνεται να είναι άκαιρη και δύσκολη. Γι αυτό ας δούμε πως μπορούμε να την υπολογίσουμε με αλγεβρικό τρόπο επανερχόμενοι στο Παράδειγμα 1.3. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να υπολογίσουμε αλγεβρικά το σημείο τομής των τριών επιπέδων ή καλλίτερα για να βρούμε την τριάδα των τιμών των αγνώστων που ικανοποιούν και τις τρείς εξισώσεις. Εμείς θα ακολουθήσουμε μια απο αυτές, την οποία θα εξελίξουμε αργότερα σε μια συστηματική σειρά από εντολές που έχουν αρχή και τέλος και είναι σαφείς και εύκολα εκτελέσιμες, δηλαδή σε έναν αλγόριθμο ευρείας χρήσης.

Προσθέτουμε λοιπόν την 1η εξίσωση της 1.11 στην 2η και αφαιρούμε το διπλάσιο της 1ης απο την 2η. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τον μετασχηματισμό των τριών εξισώσεων σε μια μορφή όπου ο άγνωστος $x$ δεν εμπλέκεται πια στην 2η και 3η εξίσωση. Σαν δεύτερο βήμα προσθέτουμε την 2η εξίσωση στην 3η. Τώρα ο άγνωστος $y$ δεν εμπλέκεται στην 3η εξίσωση.

Ας συνοψίσουμε τα παραπάνω με τον εξής αλγεβρικό τρόπο

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=5 \\ -2x+7y+2z&=9 \\ 4x-6y&=-2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+y+z&=5 \\ 8y+3z&=14 \\ -8y-2z&=-12 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+y+z&=5 \\ 8y+3z&=14 \\ z&=2 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μετασχηματίσει τις εξισώσεις μας έτσι ώστε στην τελική τους μορφή να είναι εύκολο να υπολογίσουμε την τιμή του $z$ απο την τελευταία εξίσωση ($z = 2$) να αντικαταστήσουμε την εν λόγω τιμή στην 2η εξίσωση απο την οποία θα δούμε ότι $y = 1$ και τέλος να αντικαταστήσουμε τις τιμές των $z$ και $y$ που βρήκαμε στην 1η εξίσωση για να υπολογίσουμε ότι $x = 1$. Η τριάδα των τιμών $(1, 1, 2)$ συμφωνεί τόσο με την γεωμετρική παράσταση του Παραδείγματος 1.3 όσο και με το αποτέλεσμα που προκύπτει με την παρακάτω υπολογιστική εντολή

```
solve{2x + y + z == 5, − 2x + 7y + 2z == 9, 4x − 6y  == −2}
```

Θα επανέλθουμε αργότερα στην παραπάνω πολύ σημαντική, ίσως την σημαντικότερη, αλγεβρική διαδικασία. Προς το παρόν ας προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε παραπέρα το πρόβλημα προσθέτοντας νέους αγνώστους και νέες εξισώσεις στις 1.11 για να καταλήξουμε στις εξής $m$ γενικές εξισώσεις οι οποίες εμπλέκουν τους $n$ αγνώστους σύμφωνα με τους δοσμένους συντελεστές $a_{i,j}, i = 1, \ldots m, j = 1, \ldots n$ και τα επίσης δοσμένα $b_i, i = 1, \ldots m$. $m$ και $n$ είναι δοσμένοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

## 1.2 Μια εφαρμογή της Γραμμικής Άλγβερας

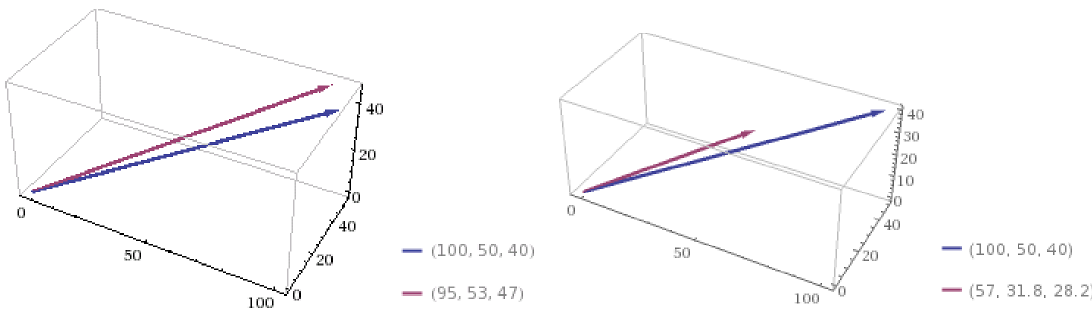
Παρόλο που έχει νόημα να περιοριστούμε στην γεωμετρική θεώρηση του προβλήματος στις περιπτώσεις που έχουμε $n \leq 3$ εντούτοις συχνά συναντάμε προβλήματα όπου $n > 3$, όπως στο παρακάτω. Θα ακολουθήσουν και άλλα τέτοιου τύπου ρεαλιστικές εφαρμογές και προβλήματα πολύ ποιό σημαντικά και ίσως κάπως ποιο περίπλοκα.

Ας θεωρήσουμε το Shapes of Cities, ένα απλό παιχνίδι του iOS στο οποίο ο στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε το σωστό μέγεθος (ουσιαστικά ύψος) κάποιων κτιρίων. Συγκεκριμένα, αφού επιλέξουμε μια μεγαλούπολη το παιχνίδι μας επιτρέπει να έχουμε μια σύντομη προεπισκόπηση των σωστών μεγεθών κάποιων σημαντικών κτιρίων της και κατόπιν μας προτρέπει να υπολογίσουμε τα σχετικά μεγέθη του κάθε κτιρίου. Δώστε ιδιαίτερη προσοχή στο "σχετικά" εδώ.

Σύμφωνα με τους συγγραφείς του εν λόγω παιχνιδιού[1] η υλοποίηση του ήταν ιδιαίτερα εύκολη με εξαίρεση το τρόπο υπολογισμού της βαθμολογίας της κάθε μαντεψιάς μας. Η βαθμολογία ήταν δύσκολο να υλοποιηθεί κυρίως επειδή υπήρχαν πολλά διαφορετικά μεγέθη οθόνης (iPhone 4-4S, 5-5S, 6-6S, 6+-6S+ και iPads). Αρχικά οι συγραφείς δοκιμάσανε διάφορες προσεγγίσεις χωρίς καμμία επιτυχία και τελικά αποφάσισαν να ακολουθήσουν την εξής προσέγγιση που βασίζεται στην χρήση Γραμμικής Άλγεβρας. Ας επικεντρωθούμε στην περίπτωση των κτίριων της Νέας Υόρκης και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τα εξής τρία κτίρια Empire State, το άγαλμα της Ελευθερίας και το μουσείο του Guggenheim τα ακριβή ύψη των οποίων είναι 100μ, 50μ και 40 μ αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε επίσης ότι ο χρήστης εκτιμά ότι τα ύψη των εν λόγω κτιρίων 95μ, 53μ και 47 μέτρα αντίστοιχα. Μπορούμε να θεωρήσουμε τις δύο τριάδες, [100, 50, 40] και [95, 53, 47], των μεγεθών

[1] φοο

r




Σχήμα 1.3: Η γωνία δύο διανυσμάτων.

των κτιρίων σαν δύο τρισδιάστατα διανύσματα και να υπολογίσουμε την γωνία μεταξύ τους. Εάν τα δύο αυτά διανύσματα είναι ορθογώνια αυτό σημαίνει ότι η υπόθεση του χρήστη διαφέρει σημαντικά από τα πραγματικά ύψη και ο παίκτης θα πάρει μηδέν σκορ. Εάν η γωνία είναι μηδέν, σημαίνει ότι τα σχετικά ύψη έχουν εκτιμηθεί σωστά. Ας χρησιμοποιήσουμε, λοιπόν, το θεώρημα του συνημιτόνου για να βρούμε τη γωνία μεταξύ τους. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει πολύ εύκολα με την παρακάτω υπολογιστική εντολή

```
VectorAngle[{100,50,40}, {95,53,47}]
```

με βάση την οποία η γωνία των δύο διανυσμάτων είναι $0,077$ rand. Έτσι, αν το μέγιστο σκορ είναι 100 και το ελάχιστο είναι 0, ο χρήστης θα βαθμολογηθεί με 99.5. Παρατηρηστε ότι σε μια άλλη μικρότερη (π.χ. 60% της οθόνης που χρησιμοποιήσαμε για τις παραπάνω μετρήσεις) οθόνη η τριάδα των εκτιμήσεων θα διαιρεθεί ανάλογα (θα γίνει [57, 31.8, 28.2]) η γωνία όμως που μας ενδιαφέρει δεν θα αλλάξει. Τα παραπάνω συνοψίζονται και με τα γραφήματα του Σχήματος 1.2

Όπως μπορούμε να δουμε όμως στο παιχνίδι δεν εμπλέκονται μόνον τρία κτήρια σε κάθε πόλη. Αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα όσον αφορά την υλοποίηση μια και η Γραμμική Άλγβερα μας επιτρέπει τον υπολογισμό της γωνίας των εμπλεκομένων $n$-άδων, χωρίς βεβαίως να έχουμε πια την γεωμετρική θεώρηση του Σχήματος 1.2 η οποία δεν είναι απαραίτητη.

**Παράδειγμα 1.4 (Γωνία δύο διανυσμάτων στον 4-διάστατο χώρο)** Έστω ότι τα ύψη του Πύργου του Άιφελ, της Αψίδας του Θριάμβου, της Παναγίας των Παρισίων και του Οβελίσκου της Πλατείας Κονκόρντ είναι 120, 40, 55 και 32 μέτρα αντίστοιχα ενώ οι εκτιμήσεις ενός χρήστη είναι 131, 41, 63 και 27 μέτρα. Υπολογήστε τον βαθμό που θα πάρει ο χρήστης.

Υπολογίζουμε την γωνία των δύο διανυσμάτων με τον εξής κώδικα

```
VectorAngle[{120,40,55,32}, {131,51,63,17}]
```

η οποία είναι 0.125 rads και ο βαθμός του χρήστη αν κάνουμε μια γραμμική απεικόνηση του διαστήματος $[0, 1.47]$ στο $[0, 100]$ είναι 85.

Σημειώστε ότι η υλοποίηση του θεωρήματος του συνημιτόνου στις $n$ διαστάσεις είναι ιδιαίτερα απλή και απαιτεί ελάχιστο κόστος (περίπου $n$ πράξεις).

## 1.3 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Ας προχωρήσουμε γενικεύοντας το πρόβλημα που ορίζουν οι εξισώσεις 1.11 ξεκινώνυας με τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 1.1 (Γραμμική Εξίσωση)** Γραμμική εξίσωση ως προς τις μεταβλητές (ή αγνώστους) $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ είναι κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

όπου τα $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, οι συντελεστές των αγνώστων και το $b \in \mathbb{R}$, ο σταθερός όρος, είναι παράμετροι οι τιμές των οποίων είναι συχνά δοσμένοι συγκεκριμένοι αριθμοί.

**Παράδειγμα 1.5 (Γραμμική εξίσωση βαθμολογίας)** Σύμφωνα με τον ιστοχώρο μας ο τελικός βαθμός του μαθήματος $b$ θα υπολογισθεί με βάση την παρακάτω γραμμική αλγεβρική εξίσωση

$$0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3 + 0.05x_4 = b$$

όπου

- $x_1$ ο βαθμός της τελικής εξέτασης μου
- $x_2$ ο μέσος όρος των βαθμών των εξετάσεων προόδου μου
- $x_3$ ο μέσος όρος των βαθμών των τεστ μου
- $x_4$ ο βαθμός των διαγωνισμών μου

**Ορισμός 1.2 (Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης)** Δοσμένων των συντελεστών $a_i, i = 1, \ldots, n$ και του δεξιού μέλους $b$ ονομάζουμε λύση της εξίσωσης

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b \tag{1.14}$$

το σύνολο των τιμών των αγνώστων $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν την ως άνω εξίσωση.

**Παράδειγμα 1.6 (Γραμμική εξίσωση βαθμολογίας)** Σύμφωνα με τον ιστοχώρο του μαθήματος ο τελικός βαθμός $b$ στο μάθημα θα υπολογισθεί με βάση την παρακάτω γραμμική αλγεβρική εξίσωση

$$0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3 + 0.05x_4 = b$$

όπου

- $x_1$ ο βαθμός της τελικής εξέτασης
- $x_2$ ο μέσος όρος των βαθμών των εξετάσεων προόδου μου
- $x_3$ ο μέσος όρος των βαθμών των τεστ μου
- $x_4$ ο βαθμός των διαγωνισμών μου

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα σύνολα $8, 5, 6, 7$ και $6, 9, 9, 9$ αποτελούν λύση της παραπάνω εξίσωσης για $b = 8$. Δηλαδή αν θέλουμε να πάρουμε σαν τελικό βαθμό 8 θα πρέπει να έχουμε πάρει στην τελική εξέταση 8, στην π??? και ??? ή να πάρουμε ??? αντίστοιχα.

Θα δούμε παρακάτω πως μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης για κάποια συγκεκριμένη τιμή του σταθερού όρου $b$.

Αν τώρα έχουμε $m$ διαφορετικές εξισώσεις της μορφής 1.14 προχωρούμε στο εξής επόμενο βήμα γενίκευσης.

**Ορισμός 1.3 (Γραμμικό Σύστημα)** Κάθε σύνολο εξισώσεων της μορφής

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι το $a_{i,j}$ είναι ο συντελεστής του $j$-στου αγνώστου στην $i$-στη εξίσωση και όπου $b_i$ είναι ο σταθερός όρος της $i$-στης εξίσωσης.

Κατ επέκταση του παραπάνω ορισμού, λύση του παραπάνω συστήματος είναι μια λίστα πραγματικών αριθμών $s_1,...,s_n$ τέτοιων ώστε αν αντικαταστίσουμε $x_i = s_i, i = 1,\ldots,n$ se όλες τις $m$ εξισώσεων τότε αυτές ικανοποιούντα. Δηλαδή, όλες οι $m$ εξισώσεις αληθεύουν όταν $x_1 = s_1, x_2 = s_2,...,x_n = s_n$.

Υποθέτουμε ότι έχουμε διατάξει με κάποιον τρόπο, όσο τις εξισώσεις όσο και τους αγνώστους σε κάποια σειρά μέσω των δεικτών $i$ και $j$ αντίστοιχα. Μπορούμε να αναδιατάξουμε τόσο τις εξισώσεις όσο και τους αγνώστους χωρίς να αλλάξουμε ουσιαστικά το αρχικό πρόβλημα.

Στο Ορισμό 1.3 αναφέρουμε ότι οι συντελεστές των αγνώστων και οι σταθεροί όροι ανήκουν στον $\mathbb{R}$ είναι δηλαδή πραγματικοί αριθμοί. Στις σημειώσεις αυτές, και χωρίς σοβαρό περιορισμό της γενικότητας, θα ασχοληθούμε μόνον σε συστήματα με πραγματικούς συντελεστές. Σημειώστε όμως ότι η επέκταση των αποτελεσμάτων που θα παρουσιάσουμε παρακάτω σε άλλους χώρους εκτός του $\mathbb{R}$ (π.χ. $\mathbb{C}$ - η περίπτωση των μιγαδικών συντελεστών) δεν είναι δύσκολη. ότι αυτοί θα μπορούσαν βέβαια να είναι και μιγαδικοί αριθμοί χωρίς να επιρεαστεί ουσιαστικά η ανάπτυξη του θέματος και τα αποτελέσματα που θα ακολουθήσουν στα επόμενα κεφάλαια.

## 1.4 Τί είναι Γραμμική Άλγεβρα;

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό προσπαθώντας να δώσουμε έναν απλό, μαθηματικά ορθό και εννοιλογικά ακριβή ορισμό της Γραμμικής Άλγεβρας. Κάτι τέτοιο δεν είναι εύκολο. Για του λόγου το αληθές προσπαθήστε να βρείτε έναν ορισμός με τα παραπάνω χαρακτηριστικά μέσω του Παγκόσμιου Ιστού. Αν δεν βρείτε κάτι στα Ελληνικά προσπαθήστε στα Αγγλικά. Δεν πιστεύω ότι οι ορισμοί που θα βρείτε θα σας ικανοποιήσουν πλήρως.

Ας ξεκινήσουμε λοιπόν την προσπάθειά μας με μερικές παρατηρήσεις. Απο την συζήτηση της Παραγράφου 1.1 μάλλον καταλήγουμε στο ότι η Γεωμετρία μπορεί να μας δώσει κάποιες πληροφορίες για την λύση συστημάτων σε δύο διαστάσεις, και σε κάποιο βαθμό και σε τρείς διαστάσεις. Οι εν λόγω πληροφορίες δεν είναι πολλές (ειδικά στις τρείς διαστάσεις), είναι όμως πολύτιμες. Για παράδειγμα μπορούμε να συνοψίσουμε όλες τις ενδεχόμενες καταστάσεις δύο ευθειών στο επίπεδο ως εξής.

**μια και μοναδική λύση** όπως στο Παράδειγμα 1.1 όπου οι δύο ευθείες έχουν διαφορετικές κλήσεις.

**καμμία λύση** όταν οι δύο ευθείες έχουν την ίδια κλήση αλλά διαφορετικους σταθερούς όρους, είναι δηλαδή παράλληλες (π.χ. $x + 2y = 3$ και $x + 2y = 4$).

**άπειρες λύσεις** όταν οι δύο ευθείες έχουν την ίδια κλήση και τους ίδιους σταθερούς όρους, είναι δηλαδή ταυτίζονται (π.χ. $x+2y=3$ και $2x+4y=6$). Οι λύσεις είναι όλα τα σημεία της κοινής ευθείας που ορίζουν και οι δύο εξισώσεις.

Πράγματι λοιπόν η γεωμετρία μας δίνει κάποιες σαφείς απαντήσεις δεν μπορεί να απαντήσει όμως όλα τα ερωτήματά μας. Για παράδειγμα δεν είναι το ίδιο εύκολο να ξεκαθαρίσουμε τι και κάτω απο ποιές σαφείς συνθήκες, θα συμβεί αν οι ευθείες είναι τρείς (ή περισσότερες) αντί για δύο.

Στις τρεις διαστάσεις η γεωμετρία μπορεί να μας βοηθήσει σε ακόμα λιγότερα ερωτήματα. Για παράδειγμα δεν μπορεί να μας δώσει μια άμεση έκφραση για την λύση στην περίπτωση του δεξιου γραφήματος στο Σχήμα 1.3. Προφανώς στις τέσσερις ή περισσότερες διαστάσεις η Γεωμετρία που γνωρίζουμε δεν μπορεί να βοηθήσει σχεδόν καθόλου. Καιρός λοιπόν να επιστρέψουμε στην Άλγεβρα σημειώνοντας ότι:

*Ένα απο τα κύρια θέματα της Γραμμικής Άλγεβρας είναι η μελέτη γραμμικών συστημάτων της μορφής 1.3. Συγκεκριμένα η Γραμμική Άλγεβρα εστιάζει στους εξής στόχους*

- *Μελέτη για το ποιό, και κάτω από ποιές συνθήκες, ενδεχόμενο ισχύει (μοναδική λύση, καμμία λύση, απειρία λύσεων).*

- *Διατύπωση, και υπολογισμός της λύση αν αυτή μοναδική.*

- *Περιγραφή όλων των λύσεων όταν αυτές είναι άπειρες.*

Αξίζει εδώ να ξεκαθαρίσουμε ότι δεν πρέπει να μας ενδιαφέρει τόσο να λύσουμε κάποιο συγκεκριμένο γραμμικό σύστημα αλλά να δημιουργήσουμε ένα γενικό πλαίσιο μέσα στο οποίο θα μπορέσουμε με σχετική ευκολία να πετύχουμε τους παραπάνω στόχους για γενικά συστήματα της μορφής 1.3.

Πρέπει επίσης να ξεκαθαρίσουμε ότι ότι το πλήθος των εξισώσεων ή/και των αγνώστων είναι ιδιαίτερα μεγάλο. Συχνά είναι της τάξης του $10^4$ τουλάχιστον. Παρόλα αυτά το καθαρά υπολογιστικό μέρος της Γραμμικής Άλγεβρας δεν θα μας αποσχολήσει ιδιαίτερα μια και αποτελεί σημαντικό μέρος της Αριθμητικής Ανάλυσης, και των Επιστημονικών Μαθηματικών με το τίτλο Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 1.1** Μπορούμε να παραστήσουμε κάθε ευθεία του επιπέδου χρησιμοποιώντας την εξίσωση 1.1;
(α) Ναι (β) Όχι (γ) Δεν μπορώ να αποφανθώ.

## Προβλήματα

**Πρόβλημα 1.1** Ποιές είναι οι σχετικές θέσεις των τριών επιπέδων σε καθένα απο τα εξής τρία συστήματα;

$$
\begin{array}{ccc}
(A) & (B) & (C) \\
2x + y + z = 5 & x + y + z = 2 & x + y + z = 2 \\
4x + 2y + 2z = 6 & 2x + +3z = 5 & 2x + 3z = 5 \\
-2x + 7y + 2z = 9 & 3x + y + 4z = 6 & 3x + y + 4z = 7
\end{array}
$$

**Πρόβλημα 1.2** Δώστε δύο συστήματα που να αντιστοιχούν στις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 1.1.

## Υπολογιστικά Προβλήματα

**Υπολογιστικά Προβλήματα 1.1** Μελετήστε την εδώ εφαρμογή. Περιοριστείτε στην θεώρηση των εξισώσεων ("row view").

# 2. Η απαλοιφή του Γκάους



Μπορείς να σκεφθείς κάποια μαθηματική έννοια η οποία είναι τόσο παλή στην διατύπωσή της που μπορεί να την διδάξεις με ευκολία στο Λύκειο, η οποία είναι τόσο χρήσιμη που χρησιμοποιείται χιλάδες ή και εκατομμύρια φορές κάθε μέρα, η οποία αποτελεί αντικείμενο μελέτης για τουλάχιστον 2000 χρόνια αλλά δεν έχει ακόμα κατανοηθεί πλήρως;

*Carl D. Meyer, NC State University*

*Θα ξεκινήσουμε με τα ποιο εύκολα προς μελέτη προβλήματα τα οποία θα προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε με διάφορους τρόπου και να τα γενικεύσουμε για τις ανάγκες μας. Θα καταλήξουμε με ένα απο τους πιό σημαντικούς επιστημονικούς αλγόριθμους την απαλοιφή του Γκάους. Η εν λόγω απαλοιφή πέρα απο την βοήθεια που θα μας προσφέρει στην πορεία μας για την θεωρητική και πρακτική μελέτη συστημάτων θα μας βοηθήσει και σε γενικότερα θέματα αλγοριθμηκά και όχι μόνον.*

*Για την ευκολία μας στο κεφάλαιο αυτό θα περιοριστούμε σε τετραγωνικά συστήματα. Η ονοματολογία τους προκύπτει απο την τετραγωνική τους μορφή η οποία με την σειρά τους προκύπτει απο το γεγονός ότι αφορούν n εξισώσει που εμπλέκουν n αγνώστους, όπου n ένας οποισδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός, συχνά αρκετά μεγάλος.*

## 2.1 Εισαγωγή

Η επίλυση γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων σαν αυτά που συαντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι ένα θεμελειώδες θέμα της Γραμμικής Άλγεβρας σε εισαγωγικό επίπεδο. Υπάρχουν πολλές μέθοδοι επίλυσης. Η πιό σημαντική απο πολλές απόψεις είναι η μέθοδος της απαλοιφής του Γκάους που θα αναπτύξουμε παρακάτω. Πέρα απο τα οποιαδήποτε άλλα χαρακτηριστικά της αποτελεί μια πρώτη και απλή επιλογή για την επίλυση μεγάλων συστημάτων, με πολλές εξισώσεις και πολλους αγνώστους.

Για να είμαστε ακριβείς, η μέθοδος της απαλοιφής δεν επιλύει γραμμικά συστήματα, απλώς τα μεταρτέπει σε ισοδύναμα συστήματα τα οποία μπορούμε να επιλύσουμε ευκολότερα. Για αυτό στην συνέχεια του κεφαλαίου πρώτα θα ασχοληθούμε με συστήματα που επιλύονται και αναλύονται εύκολα και κατόπιν θα προχωρήσουμε στην μέθοδο της απαλοιφής. Υπενθυμίζουμε ότι στο κεφάλαιο αυτό υποθέτουμε ότι όλοι οι πίνακες είναι τετραγωνικοί (εμπλέκουν τόσους αγνώστους όσες είναι και οι εξισώσεις).

## 2.2 Ειδικά συστήματα -- Διαγώνια

Όλοι θα συμφωνήσουμε ότι η επίλυση των παρακάτω δύο συστημάτων είναι απλή υπόθεση.

$$\begin{array}{cccccc} 2z & & & = & 4 \\ & -8y & & = & -8 \\ & & 2x & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & -8y & & = & -8 \\ & & 2x & = & 2 \\ 2z & & & = & 4 \end{array}$$

Παρατηρήστε οτι τα δύο παραπάνω συστήματα έχουν την ίδια λύση. Κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο μια και το ένα προκύπτει απο το άλλο με ενναλαγές της σειράς των εξισώσεων. Το ίδιο θα συνέβαινε βέβαια αν υπήρχαν και εναλλαγές της σειράς των αγνώστων.

Πριν συνεχίσουμε ας ξεκθαρίσουμε μια πολύ απλή αλλά βασική έννοια παραθέτοντας τον εξής ορισμό, στον οποίο θα αναφερθούμε και παρακάτω:

**Ορισμός 2.1 (Ισοδύναμα συστήματα)** Δύο $n \times n$[α΄] γραμμικά αλγεβρικά συστήματα λέγονται ισοδύναμα αν τα σύνολα των λύσεών τους ταυτίζονται.

[α΄] Εφεξής θα παραλείπουμε, χάρη συντομίας, να αναφέρουμε το $\forall n \in \mathbb{N}$ το οποίο όμως θα εννοείται

Προφανώς τα δύο δύο συστήματα στην 2.1 είναι ισοδύναμα. Για να λύσουμε ένα απο τα αυτά (ας επιλέξουμε για την ευκολία μας το πρώτο) το μόνο που πρέπει να κάνουμε είναι να διαιρέσουμε τον σταθερό όρο (θα αναφερόμαστε σε αυτόν συχνά και σαν δεξιό μέλος) της κάθε εξίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου. Του μοναδικού αγνώστου της εξίσωσης που δεν έχει μηδενικό συντελεστή! Συνεπώς μετά απο τρεις και μόνον πράξεις (διαιρέσεις) έχουμε σαν λύση την $z = 2, y = 1, x = 1$. Η εν λόγω λύση δεν θα αλάξει αν αλλάξουμε την σειρά των εξισώσεων ή/και την σειρά των αγνώστων.

Το σύστηματα που έχουν τα χαρακτηριστικά του 2.2 ονομάζονται διαγώνια συστήματα λόγω της προφανούς διαγώνιας μορφής τους η οποία ακόμα και αν δεν είναι φανερή μπορεί να αναδειχθεί με κατάλληλες εναλλαγές των εξισώσεων ή/και των αγνώστων της.

**Ορισμός 2.2 (Διαγώνιο σύστημα)** Ένα $n \times n$ σύστημα λέγεται διαγώνιο αν σε κάθε εξίσωση εμπλέκεται το πολύ ένας μόνον άγνωστος.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας στο εφεξείς θα υποθέτουμε ότι κάθε διαγώνιο σύστημα είναι σε διαγώνια μορφή δηλαδή έχουμε αναδιατάξει τις εξισώσεις και τους αγνώστους έτσι ώστε ο $i$-στος άγνωστος βρίσκεται στην $i$-στη εξίσωση για $i = 1, \ldots, n$. Με άλλα λόγια το γενικό διαγώνιο σύστημα έχει την εξής μορφή

$$\begin{array}{cccccccc} a_{1,1}x_1 & & & & & & = & b_1 \\ & a_{2,2}x_1 & & & & & = & b_2 \\ & & \ddots & & & & = & \vdots \\ & & & a_{i,i}x_1 & & & = & b_i \\ & & & & \ddots & & = & \vdots \\ & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \tag{2.1}$$

η οποια ενδεχομένως πορέκυψε απο κατάλληλες εναλλαγές εξισώσεων και αγνώστων. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να δώσουμε τον εξής αναλλακτικό του ορισμού 2.2 ορισμό

**Ορισμός 2.3 (Διαγώνιο σύστημα)** Ένα $n \times n, \forall n \in \mathbb{N}$ σύστημα της μορφής **??** λέγεται διαγώνιο αν $a_{i,j} = 0, \forall i \neq j$.

Σημαντικό είναι να συνειδητοποιήσουμε ότι απο τον παραπάνω ορισμό δεν προκύπτει ότι οι "διαγώνιοι συντελεστές" (οι $a_{i,i},\ i = 1, \dots, n$) είναι απαραίτητα μη-μηδενικοί.

Μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω με το εξής θεώρημα η απόδειξη του οποίου προκύπτει εύκολα απο την σχετική συζήτηση.

**Θεώρημα 2.1 (Μελέτη διαγωνίων συστημάτων)** Ένα $n \times n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ διαγώνιο σύστημα έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε τιμή των δεξιών μελών του ανν [α΄] σε κάθε εξίσωση εμπλέκεται ακριβώς ένας άγνωστος. Αν σε κάποια εξίσωση δεν εμπλέκεται κανένας άγνωστος τότε αν το δεξιό μέλος της εξίσωσης αυτής είναι μη-μηδενικό τότε το σύστημα δεν έχει λύση (είναι δηλαδή αδύνατον) ενώ αν είναι και αυτό μηδενικό τότε έχουμε απειρία λύσεων (είναι δηλαδή αόριστο) μια και ο εν λόγω άγνωστος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

[α΄] Το "ανν" είναι σύντμηση του "αν και μόνον αν".

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι το διαγώνιο σύστημα που μας δόθηκε στην μορφή 2.1, οπότε για να υπολογήσουμε την λύση πρέπει να κάνουμε τις εξής $x_i = \frac{b_i}{a_{i,i}},\ i = 1, \dots, n$ διαιρέσεις. Είναι προφανές ότι αν όλοι οι εμπλεκόμενοι παρονομαστές $a_{i,i}$ είναι διάφοροι του μηδενός τότε υπάρχουν όλες οι παραπάνω τιμές των $x_i$. Αν ένας από τους παρονομαστές είναι μηδέν (έστω ο $k$-στος) τότε ο αντίστοιχος άγνωστος $x_k$ δεν υπάρχει και συνεπώς το σύστημα δεν έχει λύση, εκτός και, και ο αντίστοιχος σταθερός όρος $b_k$) της εν λόγω εξίσωσης είναι και αυτός μηδέν. Στη τελευταία αυτήν περίπτωση η εξίσωση έχει την μορφή $0x_k = 0$ που σημαίνει ότι ο άγνωστος $x_k$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Για κάθε μια απο τις άπειρες αυτές τιμές υπάρχει και μια λύση του συστήματος, υπο την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει άλλος μηδενικός παρονομαστής. Στην περίπτωση που υπάρχει, εφαρμόζουμε ξανά την ίδια με παραπάνω λογική και διαδικασία. □

Το παραπάνω θεώρημα ολοκληρώνει πλήρως την προσπάθειά μας να αναλύσουμε τα διαγώνια συστήματα αλλά και να υπολογίσουμε την λύση ή τις λύσεις όταν αυτές υπάρχουν βεβαίως.

Είναι προφανές ότι τα διαγώνια συστήματα αποτελούν μια κατηγορία συστημάτων ακραίας ευκολίας. Ας εξετάσουμε τώρα μια κάπως ποιό περίπλοκη κατηγορία συστημάτων.

## 2.3 Ειδικά Συστήματα -- Τριγωνικά

**Ορισμός 2.4 (Άνω τριγωνικό σύστημα)** Ένα $n \times n$ σύστημα λέγεται άνω τριγωνικό αν είναι της εξής μορφής ή μπορούμε να το φέρουμε στην μορφή αυτή με κατάλληλες αναλλαγές εξισώσεων ή και αγνώστων.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,i}x_i & + & \cdots & + & a_{1,n-1}x_{n-1} & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{2,2}x_1 & + & \cdots & + & a_{2,i}x_i & + & \cdots & + & a_{2,n-1}x_{n-1} & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{i,i}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,n-1}x_{n-1} & + & a_{i,n}x_n & = & b_i \\
 & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}
\tag{2.2}
$$

Ορίστε και ο ενδεχομένως ποιο σαφής εναλλακτικός ορισμός του 2.4 ο οποίος έχει μια σαφή αλγοριθμική υφή:

**Ορισμός 2.5** **(Άνω τριγωνικό σύστημα)** Ένα $n \times n$ σύστημα της μορφής **??** λέγεται άνω τριγωνικό ανν $a_{i,j} = 0, \ \forall i < j$.

Σημειώστε ότι ο παραπάνω ορισμός δεν δηλώνει ότι $a_{i,j} \neq 0, \ \forall i \geq j$.

Προφανώς ανάλογοι ορισμοί ισχύουν για τα κάτω τριγωνικά συστήματα δηλαδή για αυτά που ισχύει ότι $a_{i,j} = 0, \ \forall i > j$.

Ας προσπαθήσουμε να εξετάσουμε το πως θα επιλύσουμε ένα γενικό άνω τριγωνικό σύστημα. Είναι απόλυτα λογικό να ξεκινήσουμε με την ποιο εύκολη εξίσωση, την τελευταία απο την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε μια έκφραση για τον τελευταίο άγνωστο

$$a_{n,n}x_n = b_n \Longrightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}.$$

Συνεχίζουμε με την προ-τελευταία εξίσωση, την ποιό εύκολη απο τις υπόλοιπες εξισώσεις, στην οποία αντικαθιστώντας την τιμής της $x_n$ μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της $x_{n-1}$ ως εξής

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}.$$

Συνεχίζοντας με τον ιδιο τρόπο και βαδίζονται απο τις τελευταίες εξισώσεις προς τις πρώτες καταλήγουμε στον εξής αλγόριθμο επίλυσης άνω τριγωνικών συστημάτων.

**solange** *not at end of this document* **tue**
    read current;
    **wenn** *understand* **dann**
        go to next section;
        current section becomes this one;
    **sonst**
        go back to the beginning of current section;
    **Ende**
**Ende**

**Algorithmus 1** : Η μέθοδος της προς τα πίσω αντικατάστασης

# 3. Διανύσματα, Πίνακες και Πράξεις



Unfortunately, no one can be told what the Matrix is. You have to see it for yourself.

*Morpheus to Neo, The Matrix*

*Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.*

## 3.1 First section

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 3.2 Second section

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 3.3 Third section

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# Ευρετήριο