سلسلة تمارين في المتتاليات العددية

اعداد: حريز خالد

التمرين الأول:

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$

1- أحسب u_3, u_2, u_1.

ا) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عددطبيعي n: $u_n \geq -2$.

ب) جد أتجاه تغير المتتالية (u_n). ماذا تستنتج ؟

2- (v_n)المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عددطبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + 2$.

ا) بين أن المتتالية (v_n) هندسية.

ب) عبر بدلالة n عن الحد العام v_n ثم u_n.

ج) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

د) أحسب بدلالة n المجموع S_nحيث: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

التمرين الثاني:

1- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 3u_{n+1} = u_n + 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عددطبيعي n يكون: $u_n \leq 2$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

ج) إستنتج مع التبرير أن المتتالة (u_n) متقاربة.

2- نضع من أجل كل عددطبيعي n: $v_n = u_n - 2$.

ا) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين ءساسها و حدها الأولv_0.

ب) أكتب الحد العام v_n بدلالة n ثم إستنتج الحد العام u_n بدلالة n.

ج) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

د) أحسب بدلالة n المجموع S_nحيث: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
عين العدد الطبيعي n بحيث يكون:$S_n = 28 - 3n$.

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = \alpha, & (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9}, & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1- برهن بالتراجع أنه فيحالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2- في كل ما يلي $\alpha = 2$، نعرف المتتالية العددية (v_n) كما يلي: $v_n = u_n + \frac{8}{3}$.

ا) أحسب u_2, u_1.

ب) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين ءساسها q و حدها الأول v_0.

ج) أكتب عبارة u_nبدلالة n. واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية u_nالمعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = \alpha u_n + 5, & (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

- نضع من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = u_n - 6,$

1- أوجد العدد الحقيقي α بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.
و أحسب ءساسها وحدها الأول في هذه الحالة.

2- نضع: $\alpha = \frac{1}{6}$.

ا) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

ج) إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3- أحسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

4- أحسب المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$.

التمرين الخامس:

(u_n)متتالية معرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = -12 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 7 \end{cases}$

1- أحسب u_3, u_2, u_1.

2- لتكن المتتالية $k_n = u_n + \alpha$.

ا) عين العدد الفيقي αحتى تكون k_n متتالية هندسية يطلب تعيين ءساسها وحدها الأول k_0.

ب) نضع $\alpha = 28$ أكتب عبارة k_n بدلالة n و ءستنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) برهن علىصحة u_n بدلالة n بالتراجع.

د) أحسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين السادس:

(v_n)متتالية معرفة من أجل كل عددطبيعي n كما يلي: $\begin{cases} v_0 = -\alpha \\ v_{n+1} = 4v_n + 3 \end{cases}$

1- ماذا تسمى العلاقة المعرفة بها المتتالية(v_n) ؟

2- عين قيمة الحد الأول v_0 التي تجعل (v_n) ثابتة.

3- نفرض فيما يلي: أن (v_n)غير ثابتةحدها الأول: $v_0 = 5$.

ا) برهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن: جميعحدود (v_n) موجبة تماما. ماذا تستنتج ؟

ب) ءدرس إتجاه تغير (v_n) ، هل هي متقاربة ؟

التمرين السابع:

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عددطبيعي n: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} \end{cases}$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عددطبيعي n: $u_n > 0$.

2- لتكن (v_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين ءساسها وحدها الأول.

أحسب v_n بدلالة n ، ثم إستنتج u_n بدلالة n.

أحسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ بدلالة n.

أحسب الجداأ $P_n = v_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ بدلالة n.

التمرين الثامن:

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} \end{cases}$

1- ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عددطبيعي n: $0 \le v_n < 1$.

ب) برهن أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما.

2- لتكن الدالة lالمعرفة على$\mathbb{R}$ كما يلي: $l(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

ا) عين العدد الحقيقي $l(\alpha)$ بحيث يكون: $l(\alpha) = \alpha$.

ب) نضع من أجل كل عددطبيعي n: $u_n = v_n - \alpha$. بين أن (u_n) متتالية هندسية ، واحسب عبارة u_n بدلالة n.

ج) إستنتج عبارة v_n بدلالةn ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.